

1. Найдите все пары натуральных m, n , такие что $n^5 + n^4 = 7^m - 1$.
2. Обозначим через d_n максимальный возможный знаменатель в несократимом представлении коэффициента при x у целозначного многочлена n -й степени. Найдите d_{2008}/d_{2007} . (Многочлен $f(x)$ называется *целозначным*, если при любом целом x число $f(x)$ целое.)
3. В треугольнике ABC точки I, H, M и F являются центром вписанной окружности, ортоцентром, серединой стороны BC и точкой касания вписанной окружности с окружностью девяти точек, соответственно. Известно, что $\angle BIM - \angle CIM = \frac{3}{2}(\angle ABC - \angle ACB)$. Докажите, что расстояние HF равно радиусу вписанной окружности.
4. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках P и Q . Прямая ℓ проходит через точку P и пересекает вторично окружности S_1 и S_2 в точках X и Y , соответственно. Точка M — середина отрезка XY . Прямая QM пересекает вторично S_1 и S_2 в точках A и B . Докажите, что $AM = BM$.
5. На доске нарисована окружность. Двое играют в игру. У каждого игрока есть по $n \geq 2$ флажков. Они втыкают по очереди флажки в еще неиспользованные точки окружности. Пусть все флажки воткнуты. Красной точкой называется точка, для которой ближайший к ней флажок — красный, а синей — такая, ближайший флажок к которой синий; остальные точки нейтральны. Выигрывает тот игрок, для которого сумма длин дуг его цвета больше. Кто выиграет при правильной игре?
6. Многочлен $a^{2007} + b^{2007}$ представили в виде многочлена от переменных $u = a + b$ и $v = ab$. Найдите сумму коэффициентов этого многочлена.
7. В квадрате 2007×2007 закрашены некоторые клетки, причем в каждом квадратице 4×4 закрашена хотя бы половина клеток. Найдите минимальное возможное число закрашенных клеток.
8. Человек стоит в лесу и знает, что прямолинейная дорога находится на расстоянии 1 км от него. Сможет ли человек найти дорогу, пройдя меньше 6,5 км?
9. Докажите, что для любых положительных x_1, \dots, x_{n+1} выполнено неравенство
$$\frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_3} + \frac{x_1 x_2 x_3}{x_4} + \dots + \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{x_{n+1}} \geq 4(1 - x_1 x_2 \dots x_{n+1}).$$
10. Несколько аэропортов соединены m двусторонними беспосадочными авиалиниями. Докажите, что аэропорты можно распределить между двумя компаниями так, чтобы хотя бы $m/2$ рейсов выполнялось между аэропортами разных компаний.

1. Найдите все пары натуральных m, n , такие что $n^5 + n^4 = 7^m - 1$.
2. В вершинах правильного n -угольника расставлены черные и белые фишки. При каких n обязательно найдутся три фишки одного цвета, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника?
3. Набор чисел $a, a + 1, a + 2, \dots, a + k$ называется отрезком натурального ряда. Два отрезка натурального ряда, каждый длины 2007, подписаны один под другим. Докажите, что так можно переставить числа в каждом из отрезков, что после сложения чисел, стоящих друг под другом, снова получится отрезок натурального ряда.
4. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках P и Q . Прямая ℓ проходит через точку P и пересекает вторично окружности S_1 и S_2 в точках X и Y , соответственно. Точка M — середина отрезка XY . Прямая QM пересекает вторично S_1 и S_2 в точках A и B . Докажите, что $AM = BM$.
5. N натуральных двузначных чисел, образующих арифметическую прогрессию с ненулевой разностью, выписаны в строчку без пробелов. Затем первую цифру полученного ряда цифр перенесли в конец и получили другую арифметическую прогрессию, составленную из двузначных чисел и записанную без пробелов. Найти наибольшее возможное значение N .
6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB , BC и CD равны, диагонали пересекаются в точке E и имеют разные длины. Докажите, что $AE = DE$ тогда и только тогда, когда $\angle BAD + \angle ADC = 120^\circ$.
7. В квадрате 222×222 закрашены некоторые клетки, причем в каждом квадратице 4×4 закрашена хотя бы половина клеток. Найдите минимальное возможное число закрашенных клеток.
8. Человек стоит в лесу и знает, что прямолинейная дорога находится на расстоянии 1 км от него. Сможет ли человек найти дорогу, пройдя меньше 7 км?
9. Докажите, что для любых положительных x_1, \dots, x_{n+1} выполнено неравенство
$$\frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_3} + \frac{x_1 x_2 x_3}{x_4} + \dots + \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{x_{n+1}} \geq 4(1 - x_1 x_2 \dots x_{n+1}).$$
10. Несколько аэропортов соединены m двусторонними беспосадочными авиалиниями. Докажите, что аэропорты можно распределить между двумя компаниями так, чтобы хотя бы $m/2$ рейсов выполнялось между аэропортами разных компаний.